Licence 3-ième année **5 mai 2015**
2014–2015

Contrôle continu de Géométrie

Durée 70 minutes

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Exercice 1 On se place dans un plan affine $(P, \overrightarrow{P})$ réel. Dans cet exercice on adoptera la définition suivante : un parallélogramme est un ensemble $\{A, B, C, D\} \subset P$ de cardinal au plus 4 (certains points peuvent être confondus) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou bien tel que $((AB) \mathbin{/\!/} (CD)$ et $(AD) \mathbin{/\!/} (BC))$ (vous pouvez utiliser la défintion que vous voulez). On dira qu'il est **dégénéré** s'il existe une droite affine le contenant.

1. Montrer qu'une application affine de P vers P envoie un parallélogramme sur un parallélogramme.
2. On considère un quadrilatère qui n'est pas un parallélogramme. Ce quadrilatère peut-il avoir pour image un parallélogramme non dégénéré par une transformation affine de P ?

Exercice 2 Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine réel.
Soient $A_1, \dots, A_m \in E$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$. Soit I une partie de $\{1, \dots, m\}$ telle que $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ et soit $J = \{1, \dots, m\} \smallsetminus I$.
Soit G_1 le barycentre des (A_i, α_i) avec $i \in I$ et soit G_2 le barycentre des (A_i, α_i) avec $i \in J$.
Montrer que si $G_1 \neq G_2$ alors la direction de la droite affine (G_1G_2) ne dépend pas de l'ensemble I choisi.
Rappel : Comme $\sum_i \alpha_i = 0$, l'application $P \mapsto \sum \alpha_i \overrightarrow{A_iP}$ est constante.

Exercice 3 (Point de Fermat) Soit ABC un triangle dans un plan euclidien. On suppose la condition suivante
($\star$) les trois angles de ABC sont strictement inférieures à $2\pi/3$.
Le but de cet exercice est d'identifier le point à l'intérieur de ABC qui minimise la somme de ses distances aux points A, B, C.
Soit P un point arbitraire à l'intérieur (strict) du triangle. Soit D le point tel que DPC est un triangle équilatéral et D et B ne sont pas du même côté de la droite (PC). Soit E le point tel que EAC est un triangle équilatéral et E et B ne sont pas du même côté de la droite (AC).

1. Trouver une transformation affine ϕ du plan qui fixe C et satisfait $\phi(A) = E$ et $\phi(P) = D$. Est-elle unique ? (Répondre par oui ou non sans justifier.) Est-ce que ϕ est une isométrie ? (Idem.)
2. Montrer que $DE = AP$. En déduire que
$$AP + BP + CP = BP + PD + DE.$$
3. Soit F le point à l'intérieur (strict) de ABC tel que $\widehat{AFB} = \widehat{CFA} = \widehat{BFC} = 2\pi/3$. Notons $G = \phi(F)$. Montrer que les quatre points B, F, G, E sont alignés. (Indication : que vaut $\widehat{BFC} + \widehat{CFG}$?) En utilisant la question 2 appliquée à un point bien choisi, montrer que
$$AF + BF + CF = BE.$$
4. Conclure que
$$AP + BP + CP \geq AF + BF + CF.$$
On appelle F *le point de Fermat* de ABC.